**Развитие математических способностей
учащихся**

Творческая работа

 Учителя математики
 Акимовой Елены Ибраимовны

Содержание

Введение.........................................................................................................

I.Теоретическая часть…………………………………………….
I.1Теоритические аспекты развития
математических способностей школьников
I.2 Элементы творческой деятельности учащихся
5-6 классов при решении занимательных задач………………………………………………………………………….

II.Практическая часть.
II.1. Актуализация математических знания в процессе решения задач……………………………………………..
II.2 Развитие учащихся средствами математики…….
II.4 Примерные упражнения по развитию математических способностей …………………………………..
II.5 задачи повышенной трудности……………………………

**Введение.**

«Математические факты и навыки со временем забываются, “выветриваются”, а математическое развитие, если оно достигнуто, остается.» (Шварцбурд С.И.)
В структуре «математического развития» я выделяю следующие компоненты:
а) развитие пространственных представлений;
б) умение отделять существенное от несущественного, умение абстрагировать, умение абстрактно мыслить;
в) умение то конкретной ситуации перейти к математической формулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующее существо дела;
г) обладание навыками дедуктивного мышления;
д) умение анализировать, разбирать частные случаи;
е) применение научных выводов на конкретном материале
ж) умение критиковать и ставить новые вопросы;
з) владение достаточно развитой математической речью, как письменной, так и устной;
и) обладание достаточным терпением при решении математических задач.

 Из собственного опыта приведу суждение относительно методики развития интересов, склонностей, способностей учащихся к математике.

 - Учитель должен стремиться к развитию учащихся разнообразных
 математических способностей.
 - В классе необходимо создавать такую обстановку, что бы учащиеся
 сами задавали вопросы, коллективное обсуждение которых будет
 способствовать лучшему усвоению материала.
 - Всё обучение должно строиться с учетом положительного опыта.
 - Учить мыслить нельзя, не обучая математическому языку,
математической речи. Это одна из трудных задач учителя математики,
поэтому живое слово учителя должно служить примером правильной
математической речи.

 - В развитии интересов, склонностей, способностей учащихся к
 математике значительное место отводится внеклассной работе.

Очень часто интерес к предмету появляется под влиянием учителя, сумевшего заинтересовать и увлечь своим предметом учащихся.
Академик П.С. Александров рассказывает, как на него – тринадцатилетнего гимназиста – произвело впечатление изложение основ геометрии Лобачевского учителем А.Р. Эгейсом, что он сразу же и бесповоротно решил стать математиком и им действительно стал.

**I. ТЕОРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

**I.1Теоритические аспекты развития
математических способностей школьников**

Математические способности характеризуются такими человеческими свойствами, которые обеспечивают возможность высокой продуктивной деятельности в области математической науки. Понятие « математические способности» включают не только познавательные стороны личности, но и эмоциональные и волевые. Способности, влияющие непосредственно на математическое мышление и составляющее основу математического творчества, можно подразделить на собственно математические и общие способности.
 Собственно математические способности состоят из способностей к обобщению математического суждения и системы соответствующих действий, к переключению с прямого на обратный ход мысли и с одной умственной операции на другую (гибкость мыслительных процессов в математической деятельности).
 Способность же к геометрическом представлениям м геометрическая интуиция (способность наглядно представлять абстрактные математическое отношения, зависимости) не является обязательными компонентами в структуре математической одаренности, но характеризуют тип математического склада ума.
 Под комплексной ( математической) способностью следует понимать такое качественно – количественное сочетание основных способностей, которое обеспечивает возможность успешного выполнения отдельных математических операций, типичность для отдельных сторон математической деятельности. Примером комплексных способностей могут служить алгоритмическая (вычислительная) способность, способность функционального мышления и т.д.
 Под общей способностью следует понимать способность, отнесенную не к одному, а ко многим видам мыслительной деятельности. Например, способность, получившая название «целостного схватывания проблем» с одновременным выделением существенных черт.
 Принципиально вопрос о развитии способностей в современной психологии давно решен положительно: способности развиваемы.
Основные положения современной психологии, касающейся развития способностей, заключаются в следующем: способности формируются и развиваются в той деятельности, которая требует применения данных способностей. Следовательно, непременным моментом для развития определенного вида способностей является выполнение специально подобранных упражнений, требующих проявления и напряженияэтих способностей. Но развитие способностей нельзя сводить к простой тренировке. Ю.А. Самарин подчеркивает творческий характер способностей в самом определении способностей: «человек, обладающий способностями, вернее, способностями к тому или иному виду деятельности, относительно быстро овладевает научной системой знаний, умений и навыков, характеризующих этот вид деятельности и, что особенно важно, достигает в данной деятельности высокого мастерства, то есть вносит в неё максимальный элемент творчества». В другом месте он прямо заявляет, что «Понятие творческий ум и умственные способности совпадают». В этом же смысле математические способности В.А. Крутецкий: «Изучая способности к усвоению математики, мы изучаем способности к творческому овладению учебным материалом».
 Таким образом, становиться совершенно очевидным, что вопрос о развитии специальных способностей немыслимо рассматривать вне связи с творчеством. это две стороны одного процесса формирования одаренности человека к определенному виду деятельности.
 Такая тесная связь и взаимное проникновение – способностей и творчества – заставляет нас искать пути развития специальных способностей человека в процессе творческого овладения им специфическими приемами данной деятельности. Это, как мы полагаем, и есть основной путь развития способностей человека.

**I.2 Элементы творческой деятельности
учащихся 5-6 классов при решении
занимательных задач**

Педагогические задачи многофункциональны, но основное содержание педагогическое деятельности – ученик. В этой связи главным критерием деятельности учителя является представление о конечном результате: хотим лимы дать ученику определенный набор знаний. По предмету или сформировать личность, готовую к творческой деятельности. В первом случае не приходится говорить о развитии учащихся, так как ученик получает готовую информацию, воспринимает ее,понимает, запоминает, затем воспроизводит, т.е. наблюдается продуктивная деятельность.
Конечно, и в этом случае нужны определенные способности к обучению, но такое обучение не оказывает существенного влияния как на общее психическое развитие детей, таки на развитие их специальных способностей. А именно это и есть развивающее обучение. Развитие учащихся во многом зависит от той деятельности, которую они выполняют в процессе обучения репродуктивной и продуктивной (творческой).
Только тогда, когда учебная деятельность, направленная на овладение основами наук и на развитие личностных качеств, сформирована на более высоком уровне, начинает ясно проявляться ее творческая сторона. И здесь следует сказать о том, что потенциальные возможности почти всех школьников высоки и главное – найти тот «рычаг», который приведет в движение механизм развития творческой деятельности, а вместе с тем и личности учащихся. Под таким « рычагом» следует понимать рациональную организацию всего учебного процесса. Сюда включено и логически-содержательное построение курсов, и создание проблемных ситуаций, и частично-поисковый и исследовательский метод обучения. Но какой бы метод обучению мы не избрали, успех в конечном итоге зависит от успешного протекания мыслительного процесса.

Творческая деятельность ученика, направленная творческое понимание усеваемого материала и порождение новых способов действия, ее развитие зависит от наличия 3-х составляющих мышления:

1) высокий уровень сформированности элементарных операций:
 анализа и синтеза, сравнения, аналогии, классификации;

2) высокий уровень активности мышления, проявляющихся в
 выдвижении множества гипотез, вариантов решений,
 нестандартных идей;

3) высокий уровень организованности и целенаправленности мышления, проявляющийся в выделении существенного в явлениях, осознания собственных способов мышления.

 Сформированность названных качеств мышления позволит преодолеть трудности в овладении учебным материалом и приведет к развитию творческой личности учащегося. Это объясняется тем, что ученик, получая теоретически обоснованные способы действий, знания, может самостоятельно вырабатывать подобные способы в незнакомых ситуациях или новые способы при решении поставленных проблем.
 Таким образом, задача учителя сводиться к формированию указанных компонентов мышления. При этом, инструментом должна выступать творческая задача. Решение учащимися творческих задач обеспечивается формируемыми у них знаниями, умениями, и навыками. Следует также отметить, что в сохранении высокой активной мыслительной деятельности на уроке играет мотивация, интерес ребенка к тому, что он делает.
 Учитывая все сказанное, можно предположить, что тем самым инструментом для развития мышления, ведущего к формированию творческой деятельности школьника, являются занимательные задачи (задачи «на воображение», на «догадку», головоломки, нестандартные задачи, логические задачи, творческие задачи). Их можно успешно использовать на уроках в качестве дополнительного вспомогательного пути для тренинга мышления и формирования элементов творческой деятельности.

 Занимательный материал многообразен, но его объединяет следующее:

1) способ решения занимательных задач неизвестен. Для их решения
 характерно «броуновское движение мысли», т.е. к решению
 приводит метод проб и ошибок;

2) занимательные задачи способствуют поддержанию интереса к
 предмету и играют роль мотива к деятельности учащихся.
 Необычность сюжета, способа презентации задачи находят
 эмоциональный отклик у детей и ставят их в условия
 необходимости ее решения;

3) занимательные задачи составлены на основе знаний законов
 мышления.

 Таким образом, систематическое применение задач такого вида способствует развитию указанных мыслительных операций и формированию указанных мыслительных операций и математических представлений детей.
 Для решения занимательных задач характерен процесс поисковых проб. Появление догадки свидетельствует о развитии у детей качеств умственной деятельности, как смекалка и сообразительность. Смекалка – это особый вид проявления творчества. Она выражается в результате анализа, сравнений, обобщений, установление связей, аналогий, выводов, умозаключений. О проявлениях сообразительности свидетельствует умение обдумывать конкретную ситуацию, устанавливать взаимосвязи, на основе которых решающий задачу приходит к выводам, обобщениям. Сообразительность является показателем умения оперировать знаниями. Из этого следует, что смекалка, сообразительность, влекущие за собой догадку как результат поиска решения занимательной задачи, не есть что-то данное свыше. Эти качества умственной деятельности можно и нужно развивать в процессе обучения.
В любом случае, догадке как способу решения задачи предшествует тщательный анализ: выделение в задаче существенных признаков, пространственного расположения и обобщения ряда фигур, их свойств, сходных признаков и т.п. Однако, для решения занимательных задач метод проб и ошибок ненадежен и нерационален. Гораздо более эффективный способ – вооружить детей теми приемами умственной деятельности, которые необходимы при этом: анализ, синтез, сравнение, аналогия, классификация. Предлагая учащимся занимательные задачи, мы формируем у них способность выполнять эти операции о одновременно развиваем их.
 Однако всегда нужно иметь ввиду, что поставленная цель будет достигнута лишь в том случае, если мы откажемся от порочной практики предлагать занимательные задачи как средство заполнения досуга и развлечения.
 Проблема включения задач подобного вида в учебный процесс должна решаться естественным образом. Среди занимательных задач много задачи чисто учебного назначения, но поданных в нестандартной или проблемной форме. Кроме того, предлагаемые учащимся задачи обязательно должны соответствовать теме урока или серии уроков. Решать их можно и при объяснении нового материала, и при закреплении пройденного.
 Покажу на примерах, как можно использовать занимательные задачи с геометрическим содержанием в 5-6 классах. При этом я преследую следующие цели:

1) формирование и дальнейшее развитие мыслительных операций;
2) развитие и тренинг мышления вообще и творческого в частности;
3) поддержание интереса к предмету, к деятельности учащихся
 вообще;
4) развитие качеств творческой личности, таких, как познавательная
 активность, усидчивость, упорство в достижении цели,
 самостоятельность;
5) подготовка учащихся к творческой деятельности.

**Тема «Геометрические фигуры». 5 класс**

1. сколько треугольников вы видите на рис.1 «а» и «б»?
Есть ли здесь четырехугольники? Сколько их?

б)

а)

Рис.1

 2. Сколько квадратов изображено на рис.2?
Имеются ли среди них равные?

Рис.2

3. Найдите на рис.3 отрезок CD. Что вы можете рассказать о нем
(CD – сторона прямоугольника; CD равна противоположной стороне AB;
CDменьше, чем BC)

Рис.4

Рис.3

4. Проведи отрезки так, чтобы они разделили пятиугольник на пять треугольников. Сколько отрезков ты провел?

5. Начертите треугольник. Проведите в нем отрезок так, чтобы он разделил треугольник на четырехугольник и треугольник. Периметр какой фигуры больше?

6. Деревянный окрашенный кубик распилили пополам. Сколько стало окрашенных и неокрашенных граней у каждой половины?

**6 класс**

1. Продолжите стороны фигуры, изображенной на рис.4 так, чтобы получился треугольник.
2. Рассмотрите рис.5 и выпишите название всех треугольников имеющих общую сторону – отрезок AB.

D

E

O

K

C

B

A

Рис.6.

Рис.6.

3. Квадратный лист бумаги разрежьте на две неравные части, а затем составьте из них треугольник.
4. Из листа бумаги, окрашенного с одной стороны

**Тема «площадь фигур»**

**5 класс.**

1. Фигура, изображенная на рис.6, состоит из 12 одинаковых квадратов.
 Перечертите ее в тетрадь и разделите на четыре равные по площади и по
 форме фигуры (делить можно ломаными линиями).

2. начертите какой-нибудь квадрат. Как надо изменить его стороны, что бы построить квадрат, площадь которого была бы: 1) вчетверо больше?
2) в 9 раз больше? 3) в 16 раз больше? Проверьте решение построением.

3. Даны три одинаковых квадрата со сторонами 2 см каждый. Какими прямоугольниками можно заменить эти три квадрата так, что бы площадь каждого прямоугольника была равна сумме площадей квадратов. Длины сторон прямоугольника должны быть выражены целыми числами.
Постройте эти прямоугольники.

4. Из 22 спичек сложить прямоугольник наибольшей площади.

**6 класс.**

1. Отмотайте от катушки кусочек нити. Отрежьте и свяжите концы. Положите эту связанную нить на лист бумаги. (рис.7). Какую форму следует придать нити, чтобы она охватила наибольшую площадь?

Рис.7

Рис.8

2. Из 12 спичек можно сложить фигуру креста, площадь которого равна пяти спичечным квадратам. Измените расположение спичек так, чтобы контур фигуры охватывал площадь, равную только четырем спичечным квадратам (рис.8).

Сравнение

Это такая мыслительная операция, с помощь. Которой устанавливают сходство и различия предметов. Формирование умения пользоваться этим приемом следует осуществлять поэтапно: а) выделение признаков или

Свойств этого объекта; б) установление сходства или различия между признаками двух объектов; в) выявление сходства между признаками трех четырех и более объектов.

**Тема «геометрические фигуры»**

**5 класс**

1. посмотрите на рис.9, а и б. Сравните, что общего в данных фигурах, а в чем их различие.

Рис.9

б)

а)

2. в чем сходство и в чем различие геометрических фигур, изображенных на рис.10 ?

Рис.10

3. Какая из данных на рис.11 фигур «лишняя» (отличается от остальных) и чем она отличается?

Рис.11

**6 класс**

1. Какая из фигур на рис.12 «лишняя»? Почему?

Рис.12

 2. Уберите «лишнюю фигуру» на рис.13 Ответ обоснуйте для каждой фигуры.
Эту задачу можно предложить по теме «ось симметрии».

Рис.13

**Аналогия**

 Аналогия – мыслительная операция, с помощью которой находится сходство между объектами в некотором отношении. Использование аналогии в математике является одним из основных методов при поиске решения задачи. Нередко рассуждения по аналогии приводят к требуемому результату.
 Задачи этой серии направлены на отработку таких познавательных приемов, как проведение словестных аналогий и нахождение аналогий между фигурами. Суть этих заданий состоит в следующем. В верхнем ряду заданы три объекта. Между первыми двумя из них есть определенная связь. Нужно ее установить и, рассуждая аналогично, подобрать из нижнего ряда объект, имеющий такую же связь с третьим объектом в верхнем ряду. При решении подобных задач проявляются такие элементы творческой деятельности, как перенос знаний и умений в новую ситуацию, видение новой функции объекта, видение структуры объекта.

**5-6 классы**

На рис. 14 в верхнем ряду изображены три фигуры. Подумайте, как связаны первые две из них, и укажите в наборе (а – г) четвертую фигуру, которая точно так же связана с третьей.(рис.14)

?

1.

г)

в)

б)

а)

?

2.

г)

в)

б)

а)

?

3.

г)

в)

б)

а)

?

4.

г)

в)

б)

а)

**Классификация**

 Классификация – обще познавательный прием мышления, суть которого заключается в разбиении множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы). Число таких подмножеств, а также их состав зависит от основания классификации (т.е. признака, существенного для данных объектов). Таким образом, одно и то же множество можно разбить на классы разными способами.
 Задания, которые мы предлагаем далее, имеют целью формирование умений классифицировать математические понятия, заданные в графической форме. Процедура их выполнения такова: рассматривая объекты верхней строки, находим их общий признак, затем отмечаем в нижней строке тот объект, который также обладает этим признаком, или исключаем из предложенных объектов тот, который не обладает общим признаком. Решение подобных задач способствует формированию у учащихся таких элементов творческой деятельности, как перенос знаний и умений в новую ситуацию, видение структуры объекта, видение альтернативы решения.

**Тема «Геометрические фигуры, ось симметрии»
5-6 классы**

 1. На рис. 15 предлагаются пять геометрических объектов. Четыре из них объединены одним общим признаком. Найди его.

Рис. 15

 2. Подумайте, что объединяет фигуры верхнего ряда рис. 16. Выберите среди пронумерованных ту фигуру, которая подходит.

г)

в)

б)

а)

3. Исключите из пяти данных на рис. 17 геометрических объектов «лишний».

Рис. 17

 4. Выберите среди пронумерованных фигур (а – г) ту, которая подходит к фигурам верхнего ряда (рис.18).

г)

в)

б)

а)

 Занимательные задачи существенно определяют результативность мыслительного процесса и сущность усвоения школьного учебного материала.
 Опыт работы показывает, что применение системы занимательных задач на уроках математики, повышает уровень усвоения заданий, появляется интерес к урокам, наблюдается значительное продвижение в мышлении. Учащиеся четко проводят логические рассуждения, делают обоснованные выводы, не затрудняются в различии геометрических фигур. Особенности мыслительного процесса в решении таких задач адекватно отражают черты творческой деятельности.

**II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ
II. Актуализация математических знаний в процессе
решения задач.**(Из опыта работы учителя Акимовой Е.И.)

В процессе решения учебных математических задач я уделяю особое
внимание актуализации знаний учащихся. С этой точки зрения весьма полезны специально подобранные серии задач, составленные так, чтобы научить школьников умело пользоваться прошлым опытом при поиске решения новой задачи. Приведу пример конкретного урока по решению задач.

 Прежде чем предложить трудную нестандартную задачу, учащимся была
предложена довольно простая задача.

1. **Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3 см. и 4 см. Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.**

Школьники предложили два способы решения:

**1-йспособ:** (см). Достроим прямоугольный треугольник до прямоугольника. А в прямоугольнике Диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. (Рис. 1)

С

С

3

4

M

A

B

A

B

M

Рис. 2

Рис. 1

D

**2-й способ:** см –египетский треугольник. ТочкаMявляется центром описанной окружности, тогда (см), т.к. – радиус этой окружности, а – ее диаметр. (Рис. 2)

Вместе со школьниками я сравниваю оба способа решения. Было установлено, что по сложности оба равноценны, но второй способ более интересен, т.к. он необычен: надо уметь пользоваться свойствами описанной окружности.

 Учитель ставит вопрос: как обобщить задачу? Ведь в задаче конкретные данные 3 см. и 4 см. Школьники сами сформулировали условие более общей задачи.

 2. **Доказать, что медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.**

Тем самым было установлено свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла. (Этим определяется учебная полезность задачи – расширение теоретической базы).

 Затем я предложила следующую задачу:

 3. **Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.**

Школьники в течении 10 минут (самостоятельно) справились с этой задачей. Некоторые из них сумели ее решить в течении 3-5 минут; и почти у каждого свой способ решения. Например:

**1-й способ** (рис.3):

1

2

4

3

5

A

B

M

N

H

Рис.3

 Воспользуемся результатом задачи 1. ACMравнобедренный, AM=MC, следовательно, 1=5. Т.к. ABCCHB, то 5=2. Тогда 1=2, ACN = NCB, т.к. CN – биссектриса; из равных частей вычитаем по равному, значит 3=4, что и требовалось доказать.

**2-й способ** (Рис. 4):

Рис. 4

2

1

1

1

H

N

M

M

N

B

C

3

1

 Опишем окружность около треугольника ABC:1=2 (известная задача 1), тогда =; = ( по теореме одиаметре, перпендикулярном хорде), = (т.к. CN - биссектриса), тогда = (дополняют равные дуги до равных) и по свойству вписанных углов 3=4.

 Здесь учащиеся воспользовались не только результатом задачи 2, но и методом решения, найденным вторым способом: описать окружность около треугольника.

M

N

B

A

2

3

1

H

Рис.6

 Как и в предыдущем случае, описываем окружность около ABC.
 1=2 (задача 1), =. Тогда 4=5 (дополняем до равных углов).
Задача решена.

 4-й способ (рис.6)

Рис.5

N

M

D

A

B

C

1

5

4

2

3

 (т.к. CN – биссектриса и точка есть точка пересечения продолжения CNс окружностью). перпендикулярен AB (известная теорема), параллельна CH. Тогда 1=3
 Остальные способы явились различными комбинациями элементами приведенных выше решений.
 Учащиеся сравнили все эти способы и признали, что первый способ является самым простым.
**Подведем итог** (что полезного узнали из этой задачи):
 1. Нужно смелее пользоваться дополнительными построениями;
 2. Активнее применять соответствующие разделы теории;
 3. Полезно с разных сторон «подходить» к рисунку-чертежу,
 находить в нем важную особенность и суметь воспользоваться
 ею.

 Кроме того, установлено интересное свойство биссектрисы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.
 В ходе решения этой задачи у учащихся естественно возник вопрос: будут ли равны углы, образованные катетами, высотой и медианной,

Опущенными из вершины прямого угла (1;2;3). Учащиеся и учитель общими усилиями выяснили, что эти углы будут равны только в частном случае, когда величины острых углов треугольника равны 30° и 60°. Таким образом, попутно была составлена и решена новая задача (рис.7).

С

1

3

2

30°

60°

B

A

M

H

Рис.7

С

B

A

M

H

P

Рис.8

 Была составлена и **обратная задача**:
**-если медиана и высота, проведенные из одной вершины
треугольника, делят вершину его угла на три равные части, то этот треугольник прямоугольный.**Эту задачу школьники решили также разными способами (рис.8). Вот один из них.
 Дано: ABCCH – высота, CM – медиана и 1=2=3. Доказать, что С=90º.
 Опишем окружность около треугольника. Докажем, что центр окружности находится в точке M (тогда ABC прямоугольный). =. Т.к. СHA=90º,AC+A=180º, т.е. центр окружности лежит на С
(С – диаметр). В то же время центр должен лежать на перпендикуляре к AB, проведенном через середину M. Но MCпересекает этот перпендикуляр в единственной точке M, значит С=90º.
 Далее я провожу обобщение, указывая на взаимосвязь высоты, медианы и биссектрисы в прямоугольном треугольнике. В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, биссектриса и медиана совпадают.

Рис.9

 При движении точки C по окружности (рис. 9) высота и биссектриса «отходят» от медианы. Биссектриса делит угол между ними пополам. Когда B=60º, **- второй частный случай,** обладающий тем свойством, что углы, образованные катетами, медианой и высотой, равны. При дальнейшем перемещении точки C угол между медианой и высотой увеличивается, а свойство биссектрисы остается.

 Затем учащиеся решили еще одну задачу:
 4. **На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок CM=BC. Доказать, что AMB – тупой. (рис.10)**

1-й способ. Условие CM=BCнаталкивало ребят на то, чтобы где-то найти прямой угол и использовать свойство медианы.
Решение. Проведем окружность с центром в точке С. MBD=90º. Т.к. BC<AC (по условию), то точка В принадлежит стороне AC. Тогда ABM – тупой. В этом случае ранее решенная задача помогла в решении данной.

2-й способ основан на свойстве центра описанной окружности (рис.11);

B

B

С

A

M

D

A

M

С

E

P

O

Рис.11

Рис.10

 если треугольник тупоугольный, то центр лежит вне треугольника: центр лежит на пересечении его медиатрис сторон. Перпендикуляр к сторонам BMпроходит через точку С (т.к. треугольник равнобедренный). Середина AM лежит на AC, т.к. AC>CM.
 Т.к. KCMострый, то DP пересекает CEв точке O вне треугольника и
∠ABMтупой.
 В этом случае также использовалась окружность, правда, описанная около данного треугольника.
 В процессе решения этих задач учащиеся использовали для связи элементов треугольника описанную окружность.

 Эта серия задач оказалась весьма полезной для учеников, т.к. она способствовала развитию у них умения нешаблонно, с интересом подойти к решению задач, побудила их к составлению новых задач, систематизировала известные знания и опыт, т.е. содействовала всестороннему развитию их математического мышления.
 При решении этих задач у учащихся развивалась способность и потребность к актуализации знаний (упорядочению знаний и опыта и умению применять его в новой ситуации). Тем самым мне удалось в какой-то мере реализовать то, что следует называть обучением решению задач.

**II.2. РАЗВИТИЕ УЧАЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ
МАТЕМАТИКИ**

Развитие учащихся средствами математики возможно осуществлять разными путями. Один из них – рассмотрение системы задач, связанных друг с другом общей фабулой так, что первая предсказывает решение второй, а вторая помогает найти ответ третьей и т.д.
 Опишу урок, на котором учащиеся работают с одной основной формой – кубом и имеют дело с одним и тем же сечением куба. Но эта главная конфигурация всё время усложняется. В конце концов, системапредложенных задач как бы сама приводит учащихся к задачам повышенной сложности, к парадоксальным выводам. При решении таких задач начинает «пробуждаться» творческая мысль учащегося.

 Задача 1. **Дан куб** ABCD **с ребром куба a. Постройте сечение куба плоскостью AMC, если точка M – середина ребра** B**.Найдите высоту сечения, проведенную к основанию AC, и его площадь.**Решение (рис.12). Диагональ грани куба AC = a.
 По теореме Пифагора найдемAM=MC= a;
В плоскости AMCсоединим
середины отрезков B и AC – точки Mи O
соответственно по теореме о трех
перпендикулярахOM**﬩**AC т.е.MO – искомая высота
сечения по теореме Фалеса она равнаполовине
диагонали куба но = a.Отсюда
MO= a. Теперь легко подсчитать и площадь
сечения S=.

D

A

B

O

D

D

A

A

D

A

C

Рис.12

M

Задача 2.**Постройте хотя бы два сечения куба** ABCD**плоскостью** AC**, еслиточка движется по отрезку**B**от** B**до**. **Найдите границы изменения высоты сечения, проведенной из точки**
Решение(рис. 13)
 Построим два требуемых сечения, взяв точку ближе к точке B, а точку ближе к .
В начале движения, когда точка только-только отошла от точки B, сечение представляет собой треугольник с основанием ACи высотойO, которая чуть
больше отрезка BO, т.е. O>a.В конце
движения форма сечения приближается к
треугольнику AC, а его высота O – к отрезку
O, длина которого равна a. Отсюда по
соображениям непрерывности делаем вывод:
a<O<a. Особо следует рассмотреть
вопрос о том, что произойдет, если точка займет
положение вершины B. А произойдет то, что задача
потеряет смысл, поскольку нельзя будет говорить о
сечении куба. В самом деле, если точки и B совпадают, то можно вести речь о плоскости, определяемой тремя точками A,B,C, которой принадлежит нижняя грань куба и в сечении будет не треугольник, а квадрат. Вывод кажется парадоксальным, но это именно тот случай, когда стимулируется развитие геометрической интуиции учащихся.

D

A

B

O

D

D

A

A

D

A

C

Рис.13

Задача 3. **В кубе ABCDточка M – середина ребра B.
Найдите:
а) угол наклона плоскости MAC к плоскости основания куба;
б) отношение площади проекции сечения MAC на основание куба к площади самого сечения.**Решение.
 а) Искомый угол – это угол MOBмежду перпендикуляром MOк диагонали ACи его проекцией BO. Обозначим его величину через γ:
; γ=arcos;
 б) В задаче 1 подсчитывалась площадь сечения AMC, она равна , а в задаче 2 уже фактически было установлено, что проекцией сечения AMCявляется треугольник ABC,площадь которого равна .
 Тогда:= (\*).
Здесьучащиесярискуютнезаметитьодинважныйвывод. Поэтому учитель задает классу провокационный вопрос: «зачем мы
вычисляли ?». Разве только для того, чтобы поупражняться в нахождении косинуса? Неужели учитель загружает класс ненужными заданиями? Ребята быстро догадываются, что значение вычислялось не напрасно, поскольку отношение (\*) можно записать иначе:
, отсюда .

 Таким образом мы пришли к важной теореме: **площадь проекции сечения куба на его основание равно площади сечения, умноженной на косинус угла, образованного плоскостями основания и сечения.**

 Задача 4. **В кубеABCD точка M – середина ребра B
Найдите расстояние *p*при движении точкиMпо ребру B.**Решение.
Построим вспомогательное сечение ипроведем в нем перпендикуляр из точки к отрезкуMO (рис. 14). Предположим, что OKпересекает MOв точке K, т.е. K перпендикулярен MO.

D

A

B

O

D

D

A

A

D

A

O

K

M

F

B

D

C

M

K

Рис.14

Рис.15

 Изобразим теперь сечение отдельно во фронтальной проекции (рис. 15). Заметим, что угол BMOравен углуKFO (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами и угол B равен углу D и равен 90°). Таким образом, треугольники MBOи F подобны по двум углам. Тогда
BO/BM=D/FD, или =а/FD.
 Отсюда а/FD=, но DO=. Из двух последних равенств следует, что точки Oи А совпадают, а значит, совпадают все три точки F, K и O. таким образом доказано, DO﬩MO, т.е. искомое расстояние*p*выражается длиной отрезка =, а длина отрезка O уже установилась в задаче 2:
O==*p* =.

**II.3. Исследовательские задания на уроках
математики**

 **«Длявсехматематиков,** - пишетамериканскийпедагогУ. Сойер, -**характерна«дерзостьума». Математикнелюбит, когдаемуочем-нибудьрассказывают, онсамхочетдойтидовсего.»**Эта «дерзостьума»особенносильнопроявляетсяудетей. Если, например, преподаваягеометриюв 7-омклассе, вырассказываете, чтониктоещенесмогразделитьуголнатриравныечастиприпомощилинейкиициркуля, вынепременноувидите, чтоодин-двамальчикаостанутсяпослеуроковибудутпытатьсянайтирешение. Тообстоятельство, чтовтечении 2000 летниктонерешилэтузадачу, непомешаетимнадеяться, чтоонисмогутэтосделать. Это, конечно, неоченьскромно, ноинесвидетельствуетобихсамонадеянности. Онипростоготовыпринятьлюбойвызов. Аведьвдействительностиужедоказано, чтоневозможноразделитьуголнатриравныечастиприпомощилинейкиициркуля. Нопопытканайтирешение–тогожерода, чтопопыткапредставитьввидерациональнойдроби«P∸Q»;
Хорошийучениквсегдастараетсязабегатьвперед.Есливыемуобъясните, какрешитьквадратноеуравнениедополнениемдополногоквадрата, оннепременнозахочетузнать, можнолирешитькубическоеуравнениедополнениемдополногокуба.
Вотэто***желаниеисследовать***являетсяотличительнойчертойматематика. Этооднаизсил, содействующихростуматематика. Математикполучаетудовольствиеотзнаний, которымионовладел, ивсегдастремитсякновымзнаниям.
Приведупримерурока–исследованияпотеме«Свойстваквадратногокорня».
Сначалаучительзадаетвопросы, нацеливающиеучащихсянанаблюдениезаматематическимиобъектами, на абстрагирование несущественных свойств этих объектов.
1. Выполните действие и сравните полученные результаты:
 и ; и .
2. Запишите в буквенной форме замеченное вами свойство.
 Каковы допустимые значения входящих в записанное равенство
 переменных?
3. Выполняется ли записанное вами равенство, если входящие в него множители
 не являются точными квадратами?
 Руководимые учителем, ребята записывают равенство

и устанавливают, что оно верно для a≥0, b≥0.
Наблюдение учащихся теперь должны оформляться в виде доказательств. К ним школьников подталкивают следующие вопросы учителя:
4. Докажите ваше предположение, используя определение
 квадратного корня.
 Чему равно выражение
 ()?
 Чему равно выражение
?
5. Как бы вы назвали доказанное свойство?
 сформулируйте его в словестной форме.
6. Выполняется ли такое свойство для корня из произведения трех
множителей?
7. Можно ли обобщить это свойство на случай произвольного числа
сомножителей?
8. Как удобно обозначить сомножители в обобщенной формуле, что бы было понятно, о каком именно числе сомножителей идет речь?

 Сама запись равенства с произвольным числом сомножителей является для школьников нетривиальным делом.
 Здесь необходимо хорошее понимание символа «…»

 Урок продолжается традиционными заданиями на применение
тождеств для вычисления значений выражений.

 Далее следует рассмотреть с классом обобщение свойства корня из произведения путем расширения области допустимых значений переменных. В результате учащиеся должны получить тождество:
, справедливое при ab≥0
Учитель не должен подсказывать ребятам нужный вывод. Лучше всего поставить их перед трудным случаем, такими, например, вопросами:
9. Имеет ли смысл выражение ?

 10. Можно ли применять к нему свойства корня из произведения?
 11. Как записать в буквенной форме равенство, позволяющее это
 сделать?

Работа класса продолжается исследованием свойства корня из дроби. Причем она проходит по вопросам, аналогичным тем, что приведены в пунктах 1-5. После того, как сформулировано свойство арифметического квадратного корня из дроби, учащиеся демонстрируют на примерах применение этого свойства.

 Следующий этап урока нужно посвятить предупреждению ошибок, которые учащиеся часто допускают в этой теме. Например, по аналогии со свойством корня из произведения учащиеся часто пишут: ;
и т.п.
 Опасность неоправданной аналогии доказывается использованием контрпримеров, которые учащиеся могут найти сами. Но осознание необходимости привести контрпримеры не возникает само собой! К этой мысли надо подтолкнуть учащихся. И так, учитель обращается к классу со следующим вопросом:
 12. Существует ли свойство из суммы; корня из разности? В поиске ответа учащиеся могут рассмотреть хотя бы такие примеры:
;
;
;
 Они заставляют дать отрицательный ответ на вопрос пункта 12.
 Урок можно закончить двумя заданиями повышенной сложности.

 13. а) докажите **формулу двойного радикала.**

 (\*\*)

б)Составьте и докажите **формулу преобразования двойного радикала**

.

 14. В каком случае использование доказанных формул упрощает
 радикал?
 Примените эти формулы для преобразования следующих выражений там, где это целесообразно:
а) ; б) ; в) ;
Учащиеся вполне могут догадаться возвести в квадрат обе части доказываемого равенства (\*\*). Квадрат правой части равенства запишите так:

+2+

Аналогично доказывается и формула:

**Формулу двойного радикала имеет смысл применять лишь тогда, когда является точным квадратом.**На описанном уроке происходит формирование таких исследовательских умений, как умение выдвинуть гипотезу на основе анализа данных и по аналогии с известным решением. Учащиеся тренируются в умении подобрать контрпример для опровержения неверного общего утверждения. Ребятам приходится проводить доказательство утверждений с опорой на определение и посредством записи закономерности в буквенной форме.

**II.4. Примерные упражнения по развитию математических способностей**

1. **Развитие способностей к обобщению**Подобранные мной упражнения направлены на творческую сторону мыслительного процесса. С этой целью разработаны комплексы задач нарастающей сложности, рассчитанные на индуктивный подход к их решению, включен ряд задач повышенной сложности, «задачи-проблемы» и другие виды творческих задач.
 Теоремы о трех замечательных точках треугольника легко могут быть выведены из одной теоремы, доказанной итальянским геометром Джованни Чева в 1678 году.
**Теорема Чева
 Если прямые, соединяющие какую-либо точку с вершинами треугольника ABC, пересекают его стороны AB, BC, CAсоответственно в точках , , ,то имеет место соотношение:**

Q

A

D

A

D

A

D

A

D

A

K

A

D

A

D

A

(Рис.16)

Доказательство.
 Проведем AP||Bи CQ|| B.
На основании теоремы об отрезках,
отсекаемых параллельными
прямыми от сторон угла, имеем:

Из подобия треугольников AKPи QKC имеем:

Следовательно:
(1)

Из подобия треугольников CQи BKследует, что:
(2)
Из подобия треугольников APи BKследует, что:
(3)
Перемножив равенства (1), (2), (3), получим окончательно:

**Обратная теорема Чевы: если все точки , , расположены соответственно на сторонахAB, BC, CA треугольника ABC или на их продолжениях так, что:**

**То прямые , , пересекаются в одной точке.**

**Задание учащимся:
Вывести пять следствий из теоремы Чевы:**

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке;
2. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке;
3. Высоты треугольника пересекаются в одной точке;
4. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного
круга, пересекаются в одной точке (точка Жергона);
5. Прямые, соединяющие вершину треугольника с точками касания не
 вписанныхокружностей, пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

**Решить следующие задачи:**

1. Фигура образованная четырьмя отрезками, соединяющими середины сторон
 четырехугольника, есть параллелограмм;
2. В четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух пар
 противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей,
 проходят через одну точку и делятся в этой точке пополам;
3. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний каждой
 точки основания от боковых сторон есть величина постоянная, равная высоте,
 опущенной на боковую сторону;
4. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний всякой точки,
взятой внутри треугольника, до сторон есть величина постоянная, равная
 высоте треугольника.
**II.5. Задачи повышенной трудности**

 Работа над задачами повышенной сложности – занятие непростое, требующее и серьезных, подчас длительных размышлений и сообразительности, а главное – желание заниматься математикой.

 Задача 1. **Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции и касательными к нему, проходящими через точку A.**

Решение. Прежде всего убедимся, что точка A не принадлежит графику данной функции. Действительно, принимает неотрицательные значения.
 Уравнение касательных будем искать в виде , где – абсцисса точки касания, а и - значение функции и ее производной при .
 Рассмотрим кривую графика функции при . Тогда ,
 и уравнение касательной примет вид или . Подставляя в полученное уравнение координаты точка A, определяем абсциссу точки касания:

 Отрицательное значение не подходит, значит, абсцисса точки касания равна 2 и уравнение касательной .
 Пусть теперь x<0. Тогда и уравнение касательной
 или .
 Подставляя координаты точки А, получим и .
 построив график функции и касательные к нему (рис. 17),

A

-3

2

+

Рис.17

выясняем, что требуемую площадь можно вычислить как сумму площадей трех фигур:

2

0

0

0

Таким образом, (кв. ед.)
Ответ: кв. ед.

Задача 2.

**Исследуйте функцию**. **(Найдите область определения, множество значений, промежутки монотонности, точки экстремума, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты, нули). Постройте ее график.**
Решение.
 1. Функция определена при всех x>0. При этих значениях x она
 дифференцируема.
 2. y=0 при x=1. Причем, если x<1, y<0, если x>1, y>0.
 3. , если x=e. На промежутке (0;e) функция убывает, т.к. для
этих значений х. Точка x=e – точка максимума.
 4. Т.к. x=у, единственная точка экстремума, значение функции в этой точке,
 равное , - ее наибольшее значение.
 5. ; , если . На промежутке (0;) график функции
имеет выпуклость (выпуклость вверх), т.к. для тех же значений x; на
промежутке () – вогнутость (выпуклость вниз), т.к. . Таким
 образом, – точка перегиба. Значение функции этой точке равно ,
 значение производной: .
6. Для определения возможного существования асимптот необходимо
выяснить поведение функции на концах области ее определения, т.е. при
 и .

приближается справа к прямой x=0 (к оси ординат).

приближается сверху к прямой y=0 (к оси абсцисс).
 7. На основе результатов п. 4, 6 делаем вывод, что множество значений функции – промежуток .
 8. График функции изображен на рис. 18

Рис.18

1

**Открытие открытого.**

Пытливый детский ум должен пытаться «открывать». Не беда, если эти попытки приведут к открытию уже известных истин, важно, чтобы для ученика его открытие явилось откровением.
 в качестве объектов для приложения творческих способностей учащихся можно с успехом использовать теоремы из школьного курса геометрии. Наиболее подходят для этой цели следующие теоремы:
**О средней линии треугольника;
 Об угле, образованном касательной и хордой;
 Об углах с вершиной внутри и вне круга;
 О биссектрисе внутреннего (внешнего) угла треугольника
 Теорема Пифагора** и др.

 Что бы привлечь учащихся к познавательной активности и творческой самодеятельности, следует разъяснить им цель этой работы, раскрыть на одном-двух примерах возможности различного подхода к доказательству теорем. Полезно знакомить учащихся с действительными фактами открытий, используя данные из литературных источников.

**Заключение**

Под способностями к изучению математики я понимаю индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности),отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частностиотносительно быстрое, легкое и глубокое овладение знанием, умением и навыками в области математики, а для этого необходимо научить учащегося самостоятельно мыслить, рассуждать, находить новые пути решения. Мыслить и искать лучшее – это исключительно ценное свойство для человека.
 Математические олимпиады, разного рода кружки, участие в сессиях МАН, математические КВН способствуют решению этой задачи.
 В течение последних пяти лет я работала над этой темой, накоплен дидактический материал, разработаны упражнения, составлены карточки-задания, собраны задачи, составленные учениками 5-6хклассов, задачи – шутки, головоломки, кроссворды, проблемные задачи. Мои учащиеся выступают с докладами на сессиях МАН. Творческая самодеятельность учащихся – отрадное явление в практике преподавания математики в школе.
 Нет сомнения в том, что данная творческая работа помогала мне обобщить и систематизировать свой педагогический опыт и выработать свою систему развития математических способностей школьников.